

PHYSIQUE ET STRUCTURES FRACTALES

Jean-François GOUYET

*Laboratoire de physique de la matière condensée
école polytechnique*

Préface de Benoît MANDELBROT

IBM Watson Research Center-Yale University

Avec 4 planches hors texte en couleur

Ouvrage publié avec le concours du ministère
De la Recherche et de la Technologie (DIST)

MASSON

Paris New York Barcelone Milan

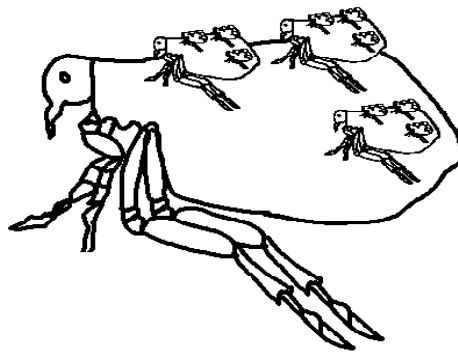
1992

...

*So, Nat'ralists observe, a Flea
Hath smaller Fleas that on him prey,
And these have smaller yet to bite 'em
And so proceed ad infinitum.*

...

Jonathan Swift, 1733,
On poetry, a Rhapsody.



...

Selon les naturalistes, une puce
Est la proie de puces plus petites qu'elle,
Celles-ci sont piquées de puces plus petites...
Et c'est ainsi, *ad infinitum*.

...

J. Swift, 1733,
Art poétique en forme de rhapsodie.

Préface

Quand les mouvements intellectuels et politiques repensent à leur histoire, aucun événement ne leur paraît plus important que le premier congrès. Pour les fractales, ce fut le congrès de Courchevel, tenu en juillet 1982, l'initiative venant de Herbert Budd et le soutien d'IBM Europe Institute. Si le livre de Jean-François Gouyet me fait penser à Courchevel de façon irrésistible, c'est que Bernard Sapoval se trouvait parmi les auditeurs. C'est là que j'ai fait sa connaissance et scellé son amitié. Et c'est de là qu'il a ramené le virus fractal à l'école polytechnique. C'est ainsi que l'inspiration de Courchevel a mené Sapoval, Gouyet et Michel Rosso à effectuer des travaux qui ont vite fait de leur laboratoire un centre mondialement reconnu sur les fractales. Si je raconte tout cela, c'est pour souligner que Gouyet n'est pas un simple auteur de manuel, mais un acteur actif sur une scène réputée. Même si le ton de son livre est uni – comme il convient –, il parle d'autorité et mérite d'être écouté.

J'aimerais m'attarder sur les fronts fractals de diffusion, dont la découverte et l'étude ont le plus fait connaître J.-F. Gouyet et ses amis de l'X. Un aspect particulièrement frappant de ce travail est qu'il est dur à classer, tant sont nombreux et variés les domaines qu'il fait intervenir. Je trouve ceci particulièrement attrayant, tout en sachant que mon opinion n'est pas partagée par ceux qui préfèrent les concepts propres aux concepts intéressants. On peut soutenir qu'il s'agit d'un travail sur la soudure, puisque c'est de cette source éminemment concrète qu'est venu le problème motivateur. On peut également soutenir qu'il s'agit surtout plutôt d'un travail de physique de la matière (mal) condensée. Mais on peut même soutenir qu'il s'agit d'un travail sur un des concepts les plus fondamentaux des mathématiques : celui de diffusion. Depuis Fourier, puis Bachelier (1900) et Wiener (1922), ce domaine se flattait de mille progrès, mais il faut avouer qu'il se posait peu de questions entièrement nouvelles. Or, la science a deux volets : en louant ceux qui savent résoudre des problèmes, il ne faut pas oublier ceux qui, de plus, savent en poser de tout nouveaux.

Mais revenons au livre lui-même. Si la variété des sujets traités surprend le lecteur, et si la brièveté de certains développements le laisse sur sa faim, Jean-François Gouyet aura gagné le pari qu'il a assumé en s'attelant à sa tâche. Ses références renvoient aux principaux textes plus spécialisés sur le sujet, dont plusieurs livres en français. J'aimerais ajouter une référence philosophique (et quelque peu polémique), à savoir le *Survole du langage fractal* ajouté à la 3^e édition de mes *Objets fractals*, espérant que la faim du lecteur en sortira encore augmentée.

Pour finir, je félicite vivement J.-F. Gouyet, et souhaite à son livre le grand succès qu'il mérite.

Benoît B. MANDELBROT
IBM T.J. Watson Research Center
Yale University
Janvier 1992

Table des matières

Préface	vii
Avant-propos	xiii
1. Géométries fractales	
1.1 Introduction	1
1.2 Notion de dimension	2
1.3 Propriétés métriques : dimension de Hausdorff, dimension topologique	4
1.3.1 La dimension topologique	5
1.3.2 La dimension de Hausdorff-Besicovitch	5
1.3.3 La dimension de Bouligand-Minkowski	6
1.3.4 La dimension d'entassement	8
1.4 Exemples de fractales	11
1.4.1 Fractales déterministes	11
1.4.2 Fractales statistiques	19
1.4.3 Invariance d'échelle	21
1.4.4 Ambiguïtés dans les mesures pratiques	22
1.5 Propriétés de connectivité.....	23
1.5.1 Dimension d'étalement, dimension de connexion	23
1.5.2 La ramification R	25
1.5.3 La lacunarité L	25
1.6 Mesures multifractales	26
1.6.1 Mesure fractale binômiale	27
1.6.2 Mesure fractale multinomiale	30
1.6.3 Ensemble de Cantor à deux échelles	36
1.6.4 Mesure multifractale d'un ensemble de points	38
2. Structures fractales naturelles : du macroscopique...	
2.1 Distribution de galaxies.....	41
2.1.1 Distribution d'amas dans l'univers	42
2.1.2 Le paradoxe du ciel en feu d'Olbers	43
2.2 Reliefs, nuages, fractures.....	45
2.2.1 Mouvement brownien, sa dimension fractale	46
2.2.2 Mouvement brownien scalaire	48
2.2.3 Fonction brownienne d'un point	49
2.2.4 Mouvement brownien fractionnaire	49
2.2.5 Fractales auto-affines	52
2.2.6 Reliefs montagneux	57
2.2.7 Densité spectrale d'un mouvement brownien fractionnaire	59
2.2.8 Nuages	61
2.2.9 Fractures	61
2.3 Turbulence et chaos.....	65
2.3.1 Modèles fractals de la turbulence développée	66
2.3.2 Chaos déterministe dans les systèmes dissipatifs	72
3. Structures fractales naturelles : ... au microscopique	
3.1 Milieux désordonnés	87
3.1.1 Un modèle : la percolation	87
3.1.2 Couches évaporées	103
3.2 Milieux poreux	105
3.2.1 Ecoulement monophasique dans les poreux mal connectés	106
3.2.2 Déplacement d'un fluide par un autre dans un poreux	107
3.2.3 Le drainage quasi statique	109
3.3 Fronts de diffusion et fronts d'invasion	116
3.3.1 Fronts de diffusion de particules sans interaction	116
3.3.2 Le cas avec interaction attractive	123
3.4 Agrégats	128

3.4.1 Définition d'un phénomène d'agrégation	128
3.4.2 Aérosols et colloïdes	130
3.4.3 Agrégation macroscopique	139
3.4.4 Couches déposées par pulvérisation cathodique	140
3.4.5 Agrégation sous champ faible	140
3.5 Polymères et membranes	144
3.5.1 Propriétés fractales des polymères	144
3.5.2 Propriétés fractales des membranes	151
4. Les modèles de croissance	
4.1 Le modèle d'Eden	155
4.1.1 Croissance de l'amas d'Eden : lois d'échelle	157
4.1.2 Le modèle de Williams et Bjerknes	160
4.1.3 Croissance d'amas de percolation	162
4.2 Le modèle de Witten et Sander.....	163
4.2.1 Description du modèle DLA	163
4.2.2 Extensions du modèle de Witten Sander	165
4.2.3 Mesure harmonique et multifractalité	170
4.3 Modélisation des surfaces rugueuses.....	172
4.3.1 Description auto-affine des surfaces rugueuses	172
4.3.2 Les modèles de déposition	172
4.3.3 Approche analytique de la croissance de surfaces rugueuses	174
4.4 L'agrégation amas-amas	175
4.4.1 L'agrégation amas-amas limitée par diffusion	175
4.4.2 L'agrégation amas-amas limitée par réaction	177
4.4.3 L'agrégation amas-amas balistique et autres modèles.....	178
5. Aspects dynamiques	
5.1 Phonons et fractons	179
5.1.1 Dimension spectrale	179
5.1.2 Diffusion et marches aléatoires	183
5.1.3 Sites distincts visités par diffusion	186
5.1.4 Phonons et fractons dans les systèmes réels	187
5.2 Transport et propriétés diélectriques	190
5.2.1 Conduction sur une fractale	190
5.2.2 Conduction dans les milieux désordonnés	192
5.2.3 Comportement diélectrique d'un milieu composite	200
5.2.4 Réponse des systèmes viscoélastiques	201
5.3 Echanges aux interfaces	205
5.3.1 Le régime limité par diffusion	206
5.3.2 Réponse d'une électrode bloquante	207
5.4 Cinétique de réaction dans les milieux fractals.....	208
6. Bibliographie	217
7. Index	228

Avant-propos

L'introduction de la notion de « fractales » par Benoît B. Mandelbrot au début des années 1970, a représenté une révolution substantielle dans des domaines variés de la physique. Si les problèmes posés par les phénomènes engendrant des structures fractales sont d'une manière générale fort difficiles, leur formulation et l'appréhension géométrique des objets concernés en ont été considérablement simplifiées. Ceci explique certainement l'immense succès que connaît ce concept dans tous les phénomènes où l'on rencontre une apparence de désordre.

Des structures géométriques complexes avaient déjà été imaginées par les mathématiciens il y a plus d'un siècle. Elles avaient à l'époque été utilisées comme exemples subtils de courbes continues mais non *rectifiables*, c'est-à-dire dont on ne peut mesurer la longueur, ou de courbes continues mais non *dérivables* partout, c'est-à-dire pour lesquelles il est impossible de tracer la tangente en un point. Benoît Mandelbrot prit conscience le premier, que de nombreuses formes dans la nature présentaient une structure fractale, depuis les nuages, les arbres, les montagnes, certaines plantes, les rivières, les côtes jusqu'à la distribution des cratères de la lune... L'existence de telles structures dans la nature est soit issue du désordre présent, soit provient d'une optimisation fonctionnelle. Il en est ainsi des arbres ou des poumons qui maximisent leur rapport surface/volume.

Ce livre, issu d'un cours donné depuis trois ans à l'École supérieure d'électricité, doit être considéré comme une introduction aux multiples phénomènes donnant naissance à des structures fractales. Il est surtout destiné aux étudiants, et à tous ceux qui souhaitent s'initier à ce domaine passionnant où des formes en apparence désordonnées deviennent géométrie ; il devrait également être utile aux chercheurs, physiciens ou chimistes, qui ne sont pas encore devenus des experts du sujet. Il ne peut avoir la prétention d'être un livre exhaustif sur toutes les dernières recherches dans le domaine, mais contient l'essentiel pour les aborder. Des approfondissements peuvent être trouvés, non seulement dans les livres de Mandelbrot (Springer Verlag promet pour 1992, une sélection de livres qui réuniront des réimpressions d'articles anciens avec de nombreux travaux inédits (Mandelbrot, 1992)), mais également dans la très abondante littérature spécialisée, dont on trouvera en fin d'ouvrage les principales références.

Après un premier chapitre introduisant les principales notions mathématiques nécessaires à la caractérisation des structures fractales, deux chapitres sont consacrés aux géométries fractales rencontrées dans la nature ; la division de ces deux chapitres,

destinée à alléger la présentation, est un peu arbitraire. Le chapitre 2 présente les structures qui peuvent avoir de très grandes tailles (galaxies, reliefs montagneux...), tandis que le chapitre 3 détaille plutôt les structures fractales étudiées par les physiciens des matériaux. Il est clair que cette classification est trop rigide ; les fractures, par exemple, engendrent des structures semblables ayant des tailles allant de quelques microns à plusieurs centaines de mètres.

Dans ces deux chapitres consacrés aux géométries fractales produites par le monde physique, nous avons introduits divers modèles très généraux. Ainsi le mouvement brownien fractionnaire est introduit à propos du relief, la percolation à propos des milieux désordonnés. Bien que ces notions aient une portée bien plus générale que les exemples auxquels ils ont été rattachés, ce choix dans l'exposition est destiné à alléger la partie mathématique du livre en l'intégrant au maximum dans un contexte physique.

Le chapitre 4 est consacré aux modèles de croissance. Ceux-ci représentent une diversité et une richesse trop grandes pour être dispersés au fil des divers phénomènes décrits.

Le chapitre 5, enfin, introduit les aspects dynamiques du transport dans les milieux fractals. Il complète ainsi les aspects géométriques de phénomènes dynamiques décrits dans les chapitres précédents.

Je tiens à remercier Pierre Collet, Eric Courtens, François Devreux, Marie Farge, Max Kolb, Roland Lenormand, Jean-Marc Luck, Laurent Malier, Jacques Peyrière, Bernard Sapoval et Richard Schaeffer, pour les nombreuses discussions que nous avons eues lors de l'élaboration de ce livre. Je remercie Benoît Mandelbrot pour les précisions qu'il m'a apportées en plusieurs points de l'ouvrage, et pour avoir accepté d'en écrire la préface. Je suis, de plus, particulièrement reconnaissant à Etienne Guyon, Jean-Pierre Hulin, Pierre Moussa et Michel Rosso pour toutes leurs remarques et suggestions et leur temps passé à la relecture de mon manuscrit. Je remercie enfin Marc Donnart et Suzanne Gouyet, pour leur précieuse aide lors de la préparation de la version définitive.

Les logiciels Mac Write II et Expressionist, Mac Draw II et Mac Paint ont été utilisés pour l'élaboration de ce livre.

Palaiseau , Mars 1992